XV Olimpíada Rioplatense de Matemática

San Isidro, 09 de dezembro de 2006

Primeiro Dia – Nível 2

Versão ao Português

Problema 1

Seja ABC um triângulo retângulo em A . Considere todos os triângulos XYZ , retângulos isósceles em X , em que X está sobre o segmento $\overline{BC}$, Y sobre o segmento $\overline{AB}$ e Z sobre o segmento $\overline{AC}$. Determinar o lugar geométrico dos pontos médios das hipotenusas $\overline{YZ}$ de tais triângulos XYZ .

Problema 2

Carlitos escreveu todos os subconjuntos de $\{1, 2, \dots, 2006\}$ em que a diferença entre a quantidade de números pares e de números ímpares é múltiplo de 3. Quantos subconjuntos Carlitos escreveu?

Problema 3

Escolheram-se vários segmentos sobre uma reta (com possíveis superposições). Se de cada segmento pintam-se de azul suas duas terças partes da esquerda, o conjunto de pontos azuis é um segmento de comprimento 31. Se de cada segmento pintam-se de vermelho suas duas terças partes da direita, o conjunto dos pontos vermelhos é um segmento de comprimento 23. Sejam M e m o máximo e o mínimo comprimento de um segmento da coleção, respectivamente. Qual o valor mínimo que pode ter $M - m$?

XV Olimpíada Rioplatense de Matemática

San Isidro, 10 de dezembro de 2006

Segundo Dia – Nível 2

Versão ao Português

Problema 4

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números positivos, não necessariamente distintos. A soma de todos os produtos tomados dois a dois ($a_i a_j$, com $i < j$) é igual a 1. Demonstre que existe um número entre eles tal que a soma dos números restantes é menor que $\sqrt{2}$.

Problema 5

A circunferência Γ é tangente aos lados AB e AC do $\triangle ABC$ em E e F , respectivamente. Sejam X a interseção de BF e EC e H uma interseção de Γ com AX . Sejam Z e T as interseções de EH e FH com BC , respectivamente. As retas ET e FZ se cortam em Q . Mostre que o ponto Q está sobre a reta AX .

Problema 6

Para cada permutação $(x_1, x_2, \dots, x_{99})$ de $\{1, 2, \dots, 99\}$, seja

$$L = |x_1 - x_2\sqrt{3}| + |x_2 - x_3\sqrt{3}| + \dots + |x_{98} - x_{99}\sqrt{3}| + |x_{99} - x_1\sqrt{3}|.$$

Determinar o valor máximo de L e para quantas permutações de $\{1, 2, \dots, 99\}$ se alcança este valor.